Examen de Programación para Ingreso a la Maestría en Ciencias de la Computación 2017
CIMAT, A.C.
(Tiempo: 4 horas)

Nombre: ______________________________

Fecha: ______________________________

Instrucciones:

- Hacer **tres grupos de hojas con sus respuetas**, uno que contenga las respuestas a las preguntas 1 y 2, otro que contenga las respuestas a las preguntas 3 y 4, y un ultimo grupo para las repuestas a las preguntas 5 a 7.
- Si se pide código, escribirlo lo más claramente posible. Especificar el lenguaje/pseudo-código utilizado.

Problema 1 [2 punto]

Una forma de representar en un solo valor la información en un conjunto de datos es por medio de la mediana. Se desea encontrar una matriz A^c que represente de forma *comprimida* la información en una matriz A de $n \times m$. El procedimiento es el siguiente:
Dados A, n, m y un nivel de compresión c (entero mayor o igual que 1), se hacen bloques de A de tamaño 2×2, para $i = 0, 2, 4, ..., n-1$ y $j = 0, 2, 4, ..., m-1$. Los bloques tendrán los índicecs $\{(i,j), (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1)\}$. En caso de que n y m sean impares, los bloques pueden tener sólo una columna o renglón. Para cada bloque se calcula la mediana (definida como el promedio de los dos valores centrales de los cuatro datos del bloque ordenados). Con las medianas se forma la matriz A^1 de dimensiones $n^1 \times m^1$, donde $n^1 = entero((n+1)/2)$ y $m^1 = entero((m+1)/2)$, el procedimiento se repite hasta obtener A^c. `Note que para una matriz` A `de` 1×1, $A^c = A$.
Programe una función que recibe A, n, m y c y devuelve A^c.

Problema 2 [2 punto]

Las formulas para calcular la media y la varianza de un conjunto de números $\{x_i\}$ es: $media = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ y $varianza = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - media)^2}{(n-1)}$.

Escriba un programa, **que no utilice arreglos**, que lea datos de la entrada estándar (consola) y escriba la media y varianza de los datos leidos hasta el momento. Por ejemplo:

```
Lectura: 1.5
```

```
Media=1.5, varianza=0
Lectura: 3
Media=2.25, varianza=1.125
...
```

La cantidad de números que se insertan es arbitraria (puede ser muy grande). En caso de que no conozcas una función de lectura de la entrada estándar, puedes suponer que existe una función getFloat() que lee la entrada estándar y devuelve un flotante. Al leer el dato '-1' el programa se parará.

Problema 3 [1.5 punto]

Sea f una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Estamos interesados en detectar ciclos en las secuencias:

$$x_{i+1} = f(x_i)$$

Por ejemplo, si $f(x) = (x^2 + 5) \mod 3$, y empezando en $x_0 = 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1 \\
&x_1 = f(x_0) = (1^2 + 5) \mod 3 = 0 \\
&x_2 = f(x_1) = (0^2 + 5) \mod 3 = 2 \\
&x_3 = f(x_2) = (2^2 + 5) \mod 3 = 0 \\
&x_4 = f(x_3) = (0^2 + 5) \mod 3 = 2 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Como se puede ver, a partir de $i = 1$, tenemos un ciclo (es decir, un patrón periódico) de periodo 2.

Escribir un programa que, para una función f dada que supondremos que tiene ciclo, y un x_0 dado, determine a partir de qué index de la secuencia se produce el ciclo, y qué periodo tiene.

Ejemplo: ante la ejecución de la función con el ejemplo de arriba, se deberá de regresar los valores 1 (principio del ciclo) y 2 (periodo).

Problema 4 [1 punto]

Para $N > 0$, implementar una función que construya una matriz $N \times N$ que corresponda al siguiente patrón (la diagonal principal es de 0s, la primera diagonal superior es de 1s, la siguiente es de 2s...).

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & N-1 \\
-1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & N-2 \\
-2 & -1 & 0 & 1 & \ldots & N-3 \\
-3 & -2 & -1 & 0 & \ldots & N-4 \\
-4 & -3 & -2 & -1 & \ldots & N-5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-(N-1) & -(N-2) & -(N-3) & -(N-3) & \ldots & 0
\end{pmatrix}$$

Problema 5 [1.5 punto]

Un vector propio x (diferente del vector 0) de una matriz A (con al menos una entrada diferente de 0) de $n \times n$ es aquel que cumple: $Ax = \lambda x$. Escriba un programa que dados A y x devuelva λ si x es un vector propio de A y 0 en caso contrario.

Ejemplo: ante la ejecución del programa con $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, se devolverá 2.

Problema 6 [2 punto]

La Estación Espacial Internacional contiene C centrifugadoras en uno de sus laboratorios. En cada una de estas centrifugadoras se pueden colocar hasta un máximo de dos especímenes. Se quiere desarrollar un programa que asigne S especímenes a las C centrifugadoras de forma que se minimice el desbalanceo obtenido. La fórmula del desbalanceo viene dada por:

$$D = \sum_{i=1}^{C} |CM_i - AM|, \text{ donde}$$

- CM_i es la masa de la centrifugadora i, y se calcula sumando la masa de los especímenes asignados a dicha centrifugadora.
- AM es la masa media de todas las centrifugadoras.

Desarrolle una función double minImbalance(int C, int S, int weights[S]) que calcule el mínimo desbalanceo. En esta función, C y S son el número de centrifugadoras y el número de especímenes, respectivamente, y el arreglo weights contiene los pesos de cada uno de los especímenes. El valor de S siempre será más pequeño que $2 \times C$.

a) Realice el cálculo explorando todas las posibles asignaciones de los especímenes a las centrifugadoras.

b) Diseñe e implemente el mejor algoritmo que se le ocurra para este problema. En particular, debe ser capaz de resolver el problemas para casos en que el valor de C es del orden de 1,000,000 en un tiempo menor a 1 segundo.

Ejemplo: ante la ejecución de la función con C = 2, S = 3, y weights = {6, 3, 8}, se debe devolver 1.