Maestría en Ciencias de la Computación
Proceso de admisión 2019
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), A.C.
Examen de matemáticas
(Tiempo: 3 horas 30 minutos)

Nombre: ______________________________

Fecha: ______________________________

Instrucciones:

- Justificar lo más precisamente posible todas sus respuestas.
- Hacer **dos grupos de hojas con sus respuestas**. El primer grupo que contenga las respuestas a las preguntas 1 a 9, y el otro para respuestas de las preguntas 10 en adelante.

Problema 1 [1.0 puntos]

¿Cuáles son las raíces reales y/o complejas del siguiente polinomio?

$$x^3 - 3x^2 + x + 1.$$

Problema 2 [1.0 puntos]

Encuentra los coeficientes del polinomio de segundo grado

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

cuya gráfica pasa por los puntos $(2, 6), (0, 12), (-1, -3)$.

Problema 3 [1.0 puntos]

Si $x < 2$, $|x - 2| = y$ y $xy = 1$ ¿Cuál es el valor de $x^2 + y^2$?

Problema 4 [1.0 puntos]

¿Cuál es la suma de los dígitos del número $(10^{2018} + 1)^3$?

Problema 5 [1.0 puntos]

¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la variable real a para que exista un valor real b tal que se cumpla la siguiente igualdad?

$$9(\log_{10} a)^2 + (\log_{10} b)^2 = 1.$$

Problema 6 [1.0 puntos]

¿En cuántas regiones se divide el plano cuando se grafican en el mismo plano las siguientes ecuaciones (sin considerar los ejes coordenados)?

$$y = x^3$$

$$y = x^4$$

$$y = x^5$$

Problema 7 [1.0 puntos]

Encuentra los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1).$$

Problema 8 [1.0 puntos]

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $g(x) = x^2 - 5x + 6$, encuentra las expresiones y dibuja las gráficas de

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad \text{y} \quad k(x) = \max\{h(x), 0\}.$$

Problema 9 [1.0 puntos]

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores propios de A,

b) Si λ es el mayor valor propio de AA muestra que $\lambda \geq 2$,

c) Si A es definida positiva y λ es su mayor valor propio muestra que $\lambda > 4$.

Problema 10 [1.0 puntos]

Encuentra la solución general $y = y(x)$ de la ecuación diferencial

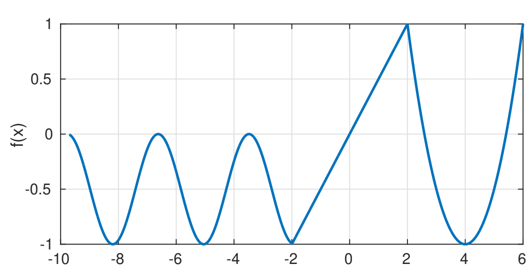
$$-y' + 2y = xe^{-x}.$$

Problema 11 [1.0 puntos]

Dada $f(x)$ como en la figura siguiente.

a) Define las ecuaciones que representan a la función $f(x)$ a trozos, especificando los valores de los parámetros que se puedan calcular a partir de los datos de la figura.

b) Dibuja $f_1(x) = 2\,|f(x/2 - 1)|$.



Problema 12 [1.0 puntos]

Mostrar la siguiente igualdad

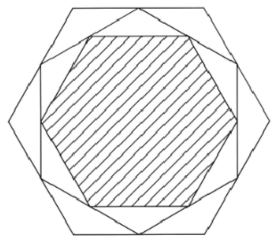
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$$

Problema 13 [1.0 puntos]

Tomamos los círculos C1 : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36$ y C2 : $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 33 = 0$.
¿Qué se puede decir de la intersección de C1 y C2?

Problema 14 [1.0 puntos]

Considera la siguiente figura con 3 hexágonos inscritos.



Calcula la razón entre el área del hexágono más chico (el sombreado) y el hexágono más grande.

Problema 15 [1.0 puntos]

Demuestra por inducción que $2^{3n+1} + 5$ es siempre un múltiplo de 7 con n un número natural.

Problema 16 [1.0 puntos]

Para dos funciones positivas f, g, decimos que $f(n) \in O(g(n))$ si $\exists\, n_0, c > 0, \forall n > n_0 : f(n) \leq cg(n)$.
Cierto o falso:

Si $f_1(n) \in O(g_1(n))$ y $f_2(n) \in O(g_2(n))$, entonces $f_1(n)/f_2(n) \in O(g_1(n)/g_2(n))$.

Demuestra el enunciado o da un contraejemplo.

Problema 17 [1.0 puntos]

La palabra *pipila* tiene 6 letras. Calcula el número de diferentes maneras en las que se pueden acomodar estas letras.