# Examen de Matemáticas para Ingreso a la Maestría en Ciencias de la Computación 2018
## CIMAT, A.C.
## (Tiempo: 3 horas 30 minutos)

Nombre: ____________________

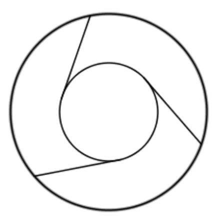
Fecha: ____________________

Instrucciones:

- Justificar lo más precisamente posible todas sus respuestas.
- Hacer **dos grupos de hojas con sus respuestas**. El primer grupo que contenga las respuestas a las preguntas 1 a 8, y el otro para respuestas de las preguntas 9 en adelante.

**Problema 1** [ 1.0 puntos ]

Una empresa conocida tiene el siguiente logo:



Consta de dos círculos concéntricos y tres líneas tal que se obtienen cuatro regiones, todas con la misma área.
Calcule la razón del área del disco mayor entre el área del disco menor.

**Problema 2** [ 1.0 puntos ]

Encuentre el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad

$$\sqrt{|x^2 - 4|} - x \geq 0.$$

**Problema 3** [ 1.0 puntos ]

Se dice que el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ está formado por vectores ortonormales si $\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{v}_j = 0$ para $i \neq j$ y $\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{v}_i = 1$, donde $\boldsymbol{v}^\top$ es el vector transpuesto de $\boldsymbol{v}$.

Dado el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ de vectores ortonormales, construimos la matriz $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\top$.

- Muestre que $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$,
- Si $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad, calcule y simplifique la expresión $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ tanto como sea posible.

**Problema 4** [ 1.0 puntos ]

Simplifique la siguiente expresión e indique si hay alguna restricción sobre los valores que puede tomar la variable $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} \ln e^x + e^{\ln x^2}.$$

**Problema 5** [ 1.5 puntos ]

Demuestre (lo más rigurosamente posible) que para cualquier real $a \in \mathbb{R}$ y cualquier número natural $n > 0$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & n(n-1)a^{n-2}/2 \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

**Problema 6** [ 1.0 puntos ]

Calcule los siguientes límites

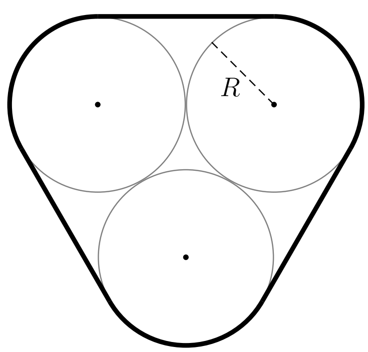
- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^3}{\sqrt[3]{x}}$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$

**Problema 7** [ 1.0 puntos ]

De una encuesta aplicada a 100 niños se obtuvo que a 78 les gusta practicar futbol, a 74 les gusta el baloncesto, a 53 les gusta el beisbol, a 46 les gusta practicar tanto futbol como béisbol y sólo 31 niños les gustan practicar los tres deportes. ¿Cuántos niños practican tanto el baloncesto como béisbol?

**Problema 8** [ 1.5 puntos ]

Considere en la siguiente figura la banda marcada por la línea en negrita, montada sobre tres círculos, cada uno de radio $R$:




Calcule la longitud de la banda en función del radio $R$ de los círculos.

**Problema 9** [ 1.5 puntos ]

Considere un polinomio de grado $n$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i,$$

con $c_n = 1$. Definimos la matriz acompañante de $p(x)$ como

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Muestre que si $\lambda_i$ es una raíz de $p(x)$ entonces

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

es un eigenvector de $\boldsymbol{M}$ asociado al eigenvalor $\lambda_i$.

**Problema 10** [ 1.0 puntos ]

Considere la transformación de los puntos $(u, v)$ a los puntos $(x, y)$ definida como:

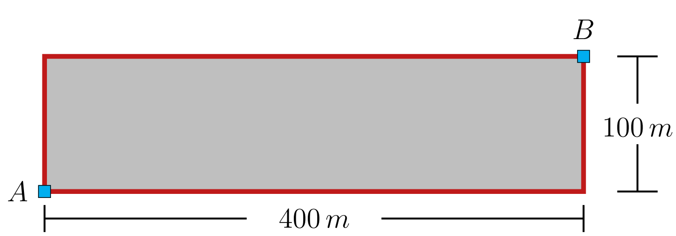
$$\begin{aligned} x &= a(u^2 - v^2), \\ y &= 2auv, \end{aligned}$$

donde $a$ es una constante positiva. Describa las curvas que forman los puntos $(x, y)$ bajo la transformación anterior aplicada a los puntos $(u, v)$ si:

- la componente $u$ es constante y $v$ recorre $\mathbb{R}$.
- la componente $v$ es constante y $u$ recorre $\mathbb{R}$.

**Problema 11** [ 1.5 puntos ]

Una persona necesita ir del punto $A$ al punto $B$, como se muestra en la siguiente figura. Si camina por el borde del rectángulo puede moverse a 1 m/s y si camina dentro del rectángulo avanza a 0.5 m/s. Determine la longitud de la trayectoria que debe seguir para poder ir del $A$ al punto $B$ en el menor tiempo posible.




**Problema 12** [ 1.5 puntos ]

Un rectángulo en el plano cartesiano tiene dos de sus vértices sobre el eje $X$ y los otros dos vértices sobre la curva $y = \dfrac{1}{2 + 2x^2}$. Encuentre las coordenadas de los vértices del rectángulo que tiene:

- área máxima.
- perimetro máximo.

**Problema 13** [ 1.0 puntos ]

Sea $n$ un entero mayor o igual que 1. Si $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, calcule el valor de la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

**Problema 14** [ 1.0 puntos ]

Sabemos que para cualesquiera números reales $x$ y $y$ se cumplen las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

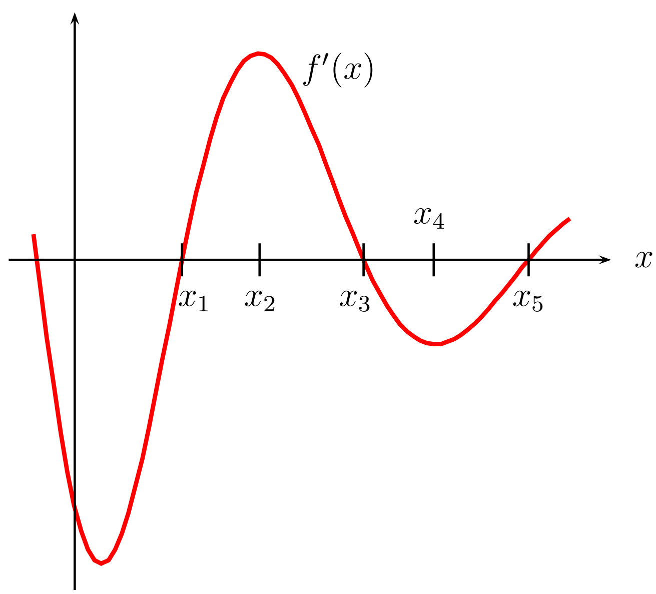
Muestre que para cualquier número real $x$ se cumple que

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

**Problema 15** [ 1.0 puntos ]

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la derivada $f'$ de una función $f$. Muestre en cuál de los puntos $0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ la función $f$

(a) tiene un máximo local,
(b) tiene un mínimo local,
(c) aumenta su valor más rápido,
(d) decrece su valor más rápido.




**Problema 16** [ 1.5 puntos ]

Escriba de forma explícita el conjunto de puntos que cumplen con

$$\{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x-1)(x-5) < 0\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3x+1}{x-2} \leq 0 \right\}.$$