Examen de Matemáticas para Ingreso a la Maestría en Ciencias de la Computación 2017
CIMAT, A.C.
(Tiempo: 3 horas 30 minutos)

Nombre: ____

Fecha: ____

Instrucciones:

- Justificar lo más precisamente posible todas sus respuestas (incluso cuando el problema es de elecciones múltiples).
- Hacer **tres grupos de hojas con sus respuestas**. El primer grupo que contenga las respuestas a las preguntas 1 a 6, el segundo con las respuestas de las preguntas 7 a 12 y el tercer para respuestas de las preguntas 13 en adelante.

Problema 1 [0.5 puntos]

Un matemático, un ingeniero y un físico son amigos, y sus nombres, en algún orden, son Alberto, Bernardo y Christian. El matemático es hijo único y es el mayor de los tres, Christian es más joven que el ingeniero y está casado con la hermana de Alberto. ¿Cuáles son las profesiones respectivas de Alberto, Bernardo y Christian?

Problema 2 [1.5 puntos]

Sea $\mathbf{P}$ la matriz 2×2:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caracterizar la familia de todas las matrices $\mathbf{A}$ de tamaño 2×2 tales que

$$\mathbf{PA} = \mathbf{AP}.$$

Problema 3 [1 puntos]

Se sabe que los estudiantes de una escuela toman tres materias de manera que

- El 55% de los estudiantes toma matemáticas
- El 65% de los estudiantes toma inglés

- El 35% de los estudiantes toma español
- El 30% de los estudiantes toma matemáticas e inglés
- El 24% de los estudiantes toma matemáticas y español
- El 18% de los estudiantes toma inglés y español
- El 12% de los estudiantes toman las tres materias

(a) ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que toman sólo dos materias?

(b) ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que no toman ninguna de las tres materias?

Problema 4 [1 puntos]

Considera la parábola definida por $f(x) = x^2$ y dos números reales $a < 0$ y $b > 0$ (ver Figura 1). Verifica que la recta que pasa por C y D corta el eje vertical en e donde $e = |a|b$. De esta manera se obtiene una manera geométrica para multiplicar dos números.

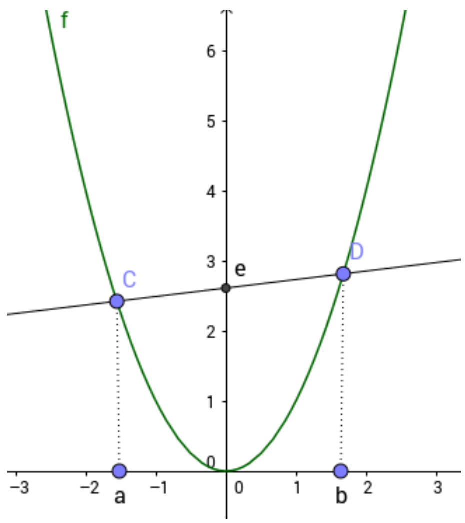

Figura 1

Problema 5 [1.5 puntos]

¿Para qué valores de r y s la expresión

$$\frac{6^{r+s} \times 12^{r-s}}{8^r \times 9^{r+2s}},$$

es entera? Desarrolla la expresión y elige entre las siguientes proposiciones:

1. $s \leq 0$,
2. $r \leq 2s$,
3. $r \leq 0$,
4. $r \leq s + 1$.

Problema 6 [1 puntos]

Un recipiente tiene forma de un cono invertido (es decir con la punta hacia abajo). Su altura es 1 metro y su base tiene un área de $1m^2$. Se llena desde arriba a través de una manguera con un caudal de 10 litros por minutos.

¿Cuál es la función que describe la altura del agua en el cono en función del tiempo t?

(hint: el volumen de un cono de altura h y con una base con área G es $\frac{Gh}{3}$)

1. $h(t) = (0.01t)^{1/3}$,
2. $h(t) = (10t)^{1/3}$,
3. $h(t) = (30t)^{1/3}$,
4. $h(t) = (0.03t)^{1/3}$,
5. $h(t) = (0.03t)^3$.

Problema 7 [1 puntos]

En una fila de 20 niños, Rosita siempre quiere estar en algún lugar en la fila adelante de María. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar los 20 niños de forma que eso suceda?

Problema 8 [1.5 puntos]

Considera la curva en el plano definida por

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$$

¿Cuál es el valor del área encerrada por esta curva?

Problema 9 [1 puntos]

Consideramos las funciones $f()$ y $g()$ como se definen en la Figura 2.

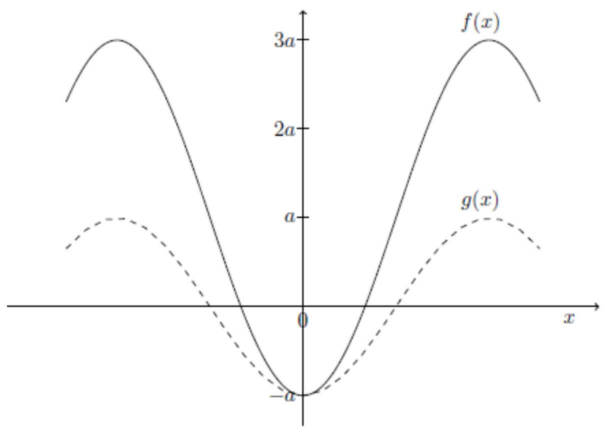

Figura 2

¿Cuál es la relación entre $f()$ y $g()$?

1. $f(x) = g(x) + 2a$,
2. $f(x) = 2g(x) + a$,
3. $f(x) = 3g(x)$,
4. $f(x) = 3g(x) + 2a$.

Problema 10 [1 puntos]

Definimos la traza de una matrix $\mathbf{A}$ como la suma de los elementos en la diagonal de $\mathbf{A}$. Supongamos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos matrices $n \times n$. Verifica que la traza de $\mathbf{AB}$ es igual a la traza de $\mathbf{BA}$.

Problema 11 [1.5 puntos]

Considera una transformación lineal definida por una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$; el espacio nulo de esta transformación se define como $\{x : \mathbf{A}x = 0\}$ y se denota como $\texttt{ker}(\mathbf{A})$.

Calcula una base para $\texttt{ker}(\mathbf{A})$ si $\mathbf{A}$ es igual a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Problema 12 [1 puntos]

Sea $x = (x_1, x_2)$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Busca una matriz $\mathbf{A}$ tal que:

$$x^T \mathbf{A} x = -x_1^2 + 6x_1x_2$$

Problema 13 [1 puntos]

Sea k un número entero positivo. Calcule $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, y $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, si

$A_k = \{-k, -k+1, ..., k-1, k\}$

Problema 14 [1.5 puntos]

Una partícula se mueve sobre el eje x de modo que su posición al tiempo t está dada por $x(t) = 1 - \tan(t)$, para $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. Al mismo tiempo, otra partícula se mueve sobre el eje y, de modo que su posición al tiempo t está dada por $y(t) = \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$.

Calcule la distancia mínima entre las dos partículas.

Problema 15 [1.5 puntos]

Sean a, b y c las raíces del polinimio $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x + 8$.

(a) Escriba la relación entre los coeficientes del polinomio y sus raíces.

(b) Muestre que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{5}{4}$.

Problema 16 [1 puntos]

Determine los coeficientes a, b, c y d tales que $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$ y tiene pendiente cero en esos puntos.

Problema 17 [1.5 puntos]

Encuentre dos constantes positivas a y b tales que $ax \leq \sin x \leq bx$ para cualquier x en $[0, \pi/2]$. Use estas desigualdades para encontrar una cota inferior y superior para la integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x}\, dx.$$