Examen de Matemáticas para Ingreso a la Maestria en Ciencias de la Computación 2015
CIMAT, A.C.
(Tiempo: 3 horas 30)

Nombre: ____________________

Fecha: ____________________

Instrucciones:

- Justificar lo más precisamente posible todas sus respuestas (incluso cuando el problema es de elecciones múltiples).
- Hacer **dos grupos de hojas con sus respuestas**. El primer grupo que contenga las respuestas a las preguntas 1 a 9, y el otro para respuestas de las preguntas 10 en adelante.

Problema 1 [0.5 puntos]

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$3x^4 - 5x^3 - 20x^2 = 4x^2 + 2x^4.$$

Problema 2 [0.5 puntos]

Sea $x > 1$. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^2}\left(t + \frac{1}{t} - \cos t\right)\, dt\right].$$

Problema 3 [0.5 puntos]

Considere un triángulo ABC que tiene como vértices los puntos

$$A = (-1, 0), \quad B = (2, 3), \quad C = (5, -3).$$

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el centroide del triángulo y que es perpendicular al lado AB del triángulo.

Problema 4 [0.5 puntos]

Dado el hecho que $5 \times 6 = 30$, ¿De cuál de las siguientes proposiciones lógicas podemos considerar este hecho como un contra-ejemplo? Explicar su respuesta.

1. El producto de dos números impares es impar.

2. El producto de dos números pares es par.
3. Si el producto de dos enteros no es múltiplo de 4, entonces esos enteros no son consecutivos.
4. Si el producto de dos enteros es múltiplo de 4, entonces esos enteros no son consecutivos.
5. Todo entero impar puede ser escrito como el producto de dos enteros impares.

Problema 5 [1.0 punto]

Se tienen números complejos $x = x_r + ix_i$ y $y = y_r + iy_i$. Dar las expresiones de las partes real e imaginaria de los siguientes números:

$$ax + by, \quad xy^2, \quad \frac{x}{y},$$

donde a y b son números reales.

Problema 6 [1.0 punto]

Don Francisco tiene 67 ovejas, dispuestas en 3 prados, A, B, C. Le dice a su vecino Don Miguel: - Si tomo dos veces el número de ovejas de A, y le agrego las de B, me da C ovejas.

Don Miguel completa: - Si tomas el número de ovejas de A, y dos veces el número de ovejas de B, tienes (C + 1) ovejas.

¿Cúantas ovejas hay en C ?

$$(a)\ 20 \quad (b)\ 30 \quad (c)\ 40 \quad (d)\ 50 \quad (e)\ 60.$$

Problema 7 [1.0 punto]

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

encontrar los valores de λ que hacen que

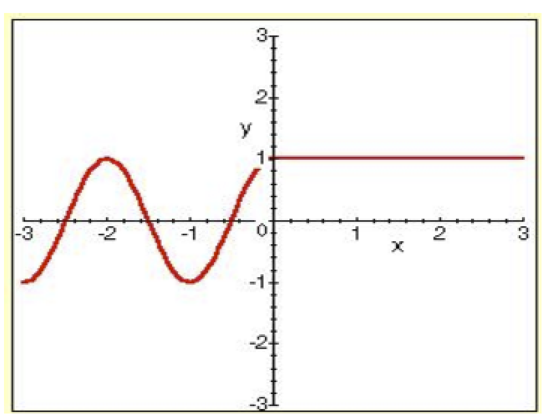
$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

donde det(.) es el determinante e I es la matriz identidad.

Problema 8 [1.0 punto]

Dada $f(\cdot)$ como en la Figura siguiente. Dibuja

1. $f_1(x) = 2f(x-1)$
2. $f_2(x) = 2 + f(x/2)$



Problema 9 [1.0 punto]

Determinar el valor de a para el cual la integral siguiente toma su valor mínimo:

$$\int_0^1 (x^2 - a)^2 dx.$$

Problema 10 [1.0 punto]

Encuentre la solución general $y = y(x)$ de la ecuación

$$y' + y = yxe^{x+2}.$$

Problema 11 [1.0 punto]

Dibujar en el plano real el conjunto de los puntos que satisfacen las desigualdades:

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 & \leq & 0, \\ \quad y - x & \leq & 0, \\ y - x + 6 & \geq & 0. \end{array}$$

Problema 12 [1.0 punto]

El número 6526 es un número interesante: tiene 4 dígitos (6, 5, 2, 6) y se puede notar que todos los pares consecutivos de dígitos ("65", "52", "26") son múltiplos de 13. Ahora, consideramos otro número del mismo tipo, que llamaremos N, compuesto de 200 dígitos:

$$N = d_1 d_2 d_3 ... d_{200}, \qquad 0 \leq d_i \leq 9 \quad i = 1, 2, ..., 200.$$

Si sabemos que el primer dígito de este numerotote es $d_1 = 9$, entonces

(a) ¿Quién debería ser el siguiente dígito d_2?

(b) Una vez que d_2 es conocido, ¿cuál debería ser el tercer dígito d_3?

(c) ¿Cuál es el último dígito d_{200} de N?

Problema 13 [1.5 puntos]

Encuentre la transformación lineal T tal que mapea a los vectores $v_1 = (2, 1)^\top$, y $v_2 = (1, -3)^\top$ en

$$Tv_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad Tv_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es la imagen del vector promedio $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ bajo la transformación T?
¿Cuáles son los vectores v cumplen la condición

$$Tv = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Problema 14 [1.5 puntos]

Sea $y = y(x)$ una función que satisface la ecuación

$$x^3 + y^3 - 12x - 8y - 16 = 0,$$

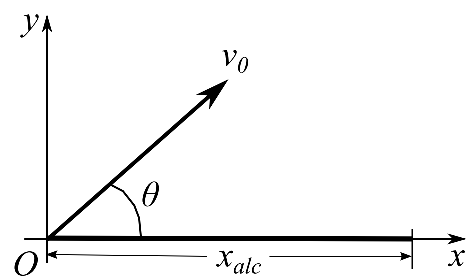
Encuentre el valor de x en el cual el eje X es tangente a la gráfica de la función y.

Problema 15 [2.0 puntos]

Se lanza un proyectil en el vacío desde un punto O (ver figura) con velocidad v_0 y ángulo de inclinación θ. La trayectoria del proyectil es descrita por la función $y(x) = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2 + x\tan\theta$ para $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ y donde $g = 9{,}8\ m/s^2$.

(a) Encuentra la altura máxima (y_{max}) que alcanza el proyectil en función de θ y v_0.

(b) Expresa la función de alcance del proyectil (x_{alc}) en términos de θ y v_0 y calcula el valor de θ que da el máximo alcance suponiendo v_0 constante.



Problema 16 [1.0 punto]

Demostrar por inducción matemática que para cualquier entero positivo n se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)2^i = n2^{n+1} + 1.$$

Problema 17 [1.0 punto]

Decimos que A^{-1} es la inversa de la matriz A si $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, donde I es la matriz identidad. Pruebe que

(a) Si A y $I + A$ son invertible, entonces $I + A^{-1}$ es invertible y $(I + A^{-1})^{-1} = A(I + A)^{-1}$.

(b) Si $I + A$ es invertible, entonces $A(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}A$.