Maestría en Ciencias con Especialidad en Computación y Matemáticas Industriales
Proceso de admisión 2024
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), A.C.
Examen de Matemáticas
(Tiempo: 3 horas)

Nombre: ____

Fecha: ____

Instrucciones:

- Escriba lo más claro posible para que al digitalizar las respuestas sean legibles.
- Escriba su nombre en cada hoja.
- Resuelva cada problema en hojas independientes.
- Justifique lo más precisamente posible todas sus respuestas, el procedimiento es importante y es tomado en cuenta en la evaluación.

Problema 1 [1 puntos]

Una matriz cuadrada Q de tamaño $n \times n$ se dice *ortogonal* si su inversa es igual a su transpuesta, es decir $Q^\top = Q^{-1}$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\|_2 = 1$. Demostrar que la matriz $Q := I_{n\times n} - 2uu^\top$ es *simétrica* y *ortogonal*.

Problema 2 [1 puntos]

Para reforestar un bosque parcialmente destruido por un incendio, Pepe empieza a sembrar árboles. Cada mes, como llega a mejorar su técnica, logra sembrar 10 árboles más que en el mes anterior. Después de 5 años exactamente, llega a un total de 19500 árboles sembrados. ¿Cuántos árboles ha sembrado durante el primer mes?

Problema 3 [1 puntos]

Consideremos la parábola de ecuación:

$$y = x^2 - 8.$$

Entre todas las *tangentes* a esta parábola, determinar cual(es) de ella(s) pasan por el punto $(5, 1)$. Dar su(s) ecuación(es).

Problema 4 [1.5 puntos]

Una función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable de orden 2 se dice *convexa* si satisface que su matriz hessiana (la matriz cuadrada que contiene todas las derivadas parciales de orden 2 de la función) es *semidefinida positiva* en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$. Recordamos que una matriz A de tamaño $n \times n$ es semidefinida positiva si $\forall (u_1 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^n : (u_1 \cdots\ u_n)\, A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \geq 0$.

Una propiedad de las funciones convexas es que sus puntos críticos son *mínimos globales.*

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b) \neq (0, 0)$. Determinar los valores $n \in \mathbb{N}$ por los cuales la función

$$f(x, y) = (ax + by + c)^n,$$

es convexa.

2. Determinar, si existen, los mínimos globales de f.

Problema 5 [1 puntos]

Suponga que x_0 es una solución particular del sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde A es una matriz rectangular y x, b son vectores. Demuestra que el conjunto de todas las soluciones del sistema $Ax = b$ es:

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid Ax = b\} \\ &= \{x \mid x = x_0 + h,\ \text{donde } h \in N(A)\} \\ &= x_0 + N(A) \longleftarrow\ \text{Notación} \end{aligned}$$

NOTA: $N(A)$ es el espacio nulo o kernel de A.

Problema 6 [2 puntos]

La ruta de un tren se define como el conjunto de puntos (lugar geométrico) que equidistan del punto $A(0, 6)$ y el punto $B(5, 1)$ en un plano cartesiano. Supongamos que te encuentras en el punto $C(0, 0)$.

1. ¿Cuál es la distancia mínima que debes recorrer para intersectar la ruta del tren?
2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

Problema 7 [1.5 puntos]

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

1. ¿Qué vale I_1?
2. ¿Qué vale I_2?
3. Usando dos formas de expresar I_{n+2} e integración por partes, mostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. (Para 0.5 puntos extras) Deducir una formula explícita para I_n por cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Problema 8 [1 puntos]

¿Cuántas soluciones *reales distintas* tiene la ecuación siguiente?

$$((x^2 - 2)^2 - 5)^2 = 9.$$