Maestría en Ciencias con Especialidad en Computación y Matemáticas Industriales
Proceso de admisión 2025
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), A.C.
Examen de Matemáticas
(Tiempo: 3 horas)

Nombre: ____

Fecha: ____

Instrucciones:

- Escriba lo más claro posible para que al digitalizar las respuestas sean legibles.
- Escriba su nombre en cada hoja.
- Resuelva cada problema en hojas independientes.
- Justifique lo más precisamente posible todas sus respuestas, el procedimiento es importante y es tomado en cuenta en la evaluación.

Problema 1 [1 punto]

Se dice que una matriz cuadrada $\mathbf{Q}$ de tamaño $n \times n$ es *ortogonal* si su inversa es igual a su transpuesta, es decir $\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^{-1}$. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector tal que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, y definimos la matriz $\mathbf{Q} := \mathbf{I}_{n\times n} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top$, demostrar que,

1. $\mathbf{Q}$ es *simétrica* (0.5 pts.),
2. $\mathbf{Q}$ es *ortogonal* (0.5 pts.).

Problema 2 [1.5 punto]

Determinar la ecuación de todos los círculos con radio 4, con centro ubicado en la línea de ecuación $4x + 3y + 7 = 0$ y tangente a la línea de ecuación $3x + 4y + 34 = 0$.

Problema 3 [1.5 punto]

Consideramos $y_0(x)$ una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Definimos la serie infinita:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i(x)$$

dónde

$$I_0 = y_0(x),$$
$$I_i = \int_0^x I_{i-1}(x)dx, \quad \forall i \geq 1.$$

Mostrar que si $y_0(x) = \alpha$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, (es decir, una función constante) entonces la función $y(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y''' + 2y'' - 5y' + 2y = 0.$$

Problema 4 [1 punto]
Determinar el conjunto de valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la expresión siguiente sea *positiva o nula para cualquier* $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - ax + 4x - 1 + a.$$

Problema 5 [1 punto]
Evaluar la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{2} |x|(x^2 - x + 1)dx.$$

Expresar la respuesta como una fracción irreductible.

Problema 6 [1 punto]
Consideramos la secuencia u_n, $n \geq 1$, definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 7 \\ u_{n+1} &= \frac{23u_n - 53}{5u_n + 1}. \end{aligned}$$

Determinar el valor de u_{2025}.

Problema 7 [1.5 punto]
En un reino lejano, el gran mago Zenith tiene una torre mágica justo en el centro del Valle del Silencio. Consideramos que la punta A de dicha torre está ubicada a la vertical del punto $(0, 0)$ del plano horizontal, a cierta altura L del suelo. Desde el punto C, ubicado a la vertical del punto $(0, R)$ del plano horizontal, a la misma altura L del suelo, el mago ha conjurado un anillo flotante de energía, con radio R. Cada noche, el aprendiz del mago, montado en una escoba encantada, se desplaza sobre el borde de este anillo mientras Zenith observa la trayectoria del aprendiz desde la punta de la torre.

El mago, intrigado por la geometría de su hechizo, lanza una nueva pregunta mágica: *¿Cuál es el lugar geométrico de los* ***puntos medios*** *de los rayos mágicos que conectan la punta de la torre con la escoba de mi aprendiz mientras vuela alrededor del anillo mágico?*

Problema 8 [1.5 punto]
Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable de orden 2 es *armónica* si satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. Decir si las siguientes funciones son armónicas. Justificar su respuesta.

$$f_1(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y \qquad\qquad f_2(x, y) = e^{7x} \cos 7y$$

2. Demostrar que si f es armónica, entonces la función $g(x, y) = f(x - y, x + y)$ es armónica.