Examen de Matemáticas para Ingreso a la Maestría en Ciencias de la Computación 2016
CIMAT, A.C.
(Tiempo: 3 horas y 30 minutos)

Nombre: ____

Fecha: ____

Instrucciones:

- Justificar todas sus respuestas lo más precisamente posible (incluso cuando el problema es de elecciones múltiples).
- Hacer **tres grupos de hojas con sus respuestas**. El primer grupo que contenga las respuestas a las preguntas 1 a 6, otro para las respuestas a las preguntas 7 a 12, y finalmente otro para respuestas de las preguntas 13 en adelante.

Problema 1 [1 puntos]

Encuentre los coeficientes del polinomio de segundo grado

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

que cumple las siguientes condiciones:

$$p(1) = -2, \qquad p'(-1) = 4, \qquad p'(3) = 12.$$

Problema 2 [0.5 puntos]

Definimos x, y, z a partir de dos ángulos ϕ y θ como sigue:

$$\begin{cases} x &= \cos\phi \sin\theta, \\ y &= \sin\phi, \\ z &= \cos\theta\cos\phi. \end{cases}$$

Simplificar lo más que se pueda la expresión de $x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 3 [1 puntos]

Si la media aritmética de 5 enteros consecutivos es 22, ¿cuál es el más chico y el más grande de estos 5 enteros?

Problema 4 [0.5 puntos]

¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación siguiente?

$$(x^2 + x - 1)^2 = 1.$$

Problema 5 [0.5 puntos]

¿ Para qué valores de x se satisface la desigualdad $x^4 < 8x^2 + 9$?

Problema 6 [1 puntos]

Sea $A = [a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$. Se dice que A es una involución si $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad. Es decir, A es una involución si A es invertible y es su propia inversa.

(a) Muestre que A es una involución si y sólo si $(I - A)(I + A) = 0$.

(b) Determine las condiciones sobre las entradas de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para que A sea una involución.

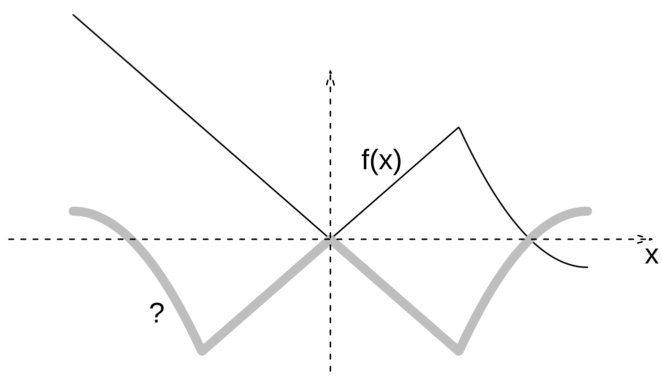
Problema 7 [0.5 puntos]

En el intervalo [0,2], ¿cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\cos(\sin x) = \frac{1}{2}?$$

Problema 8 [0.5 puntos]

Dadas las dos gráficas en la Figura siguiente. Si $f(\cdot)$ está representada por la línea más delgada, ¿cuál función representa la gráfica gruesa?



1. $|f(x)|$
2. $-|f(x)|$
3. $f(|x|)$
4. $-f(|x|)$
5. ninguna de las anteriores.

Problema 9 [1 puntos]

Calcula

$$\int_0^\infty x \exp(-\lambda x) dx.$$

Problema 10 [1 puntos]

Dar la fórmula para encontrar el valor de a que minimiza:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a y_i)^2,$$

donde $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$ son valores conocidos.

Problema 11 [1 puntos]

Consideremos un triángulo isósceles de *perímetro* 60cm. Sea l la longitud de su base. ¿Para qué valor de l el área del triángulo es máxima?

Problema 12 [0.5 puntos]

Dá la ecuación del lugar geométrico de los puntos en el plano tales que su distancia a la recta $3x + 4y = 0$ sea igual a su distancia al origen. Decir de que tipo de curva se trata.

Problema 13 [0.5 puntos]

Calcule la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ del plano que contiene a los puntos $(10, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$ y $(0, 0, 10)$ y que satisfaga $A^2 + B^2 + C^2 = 1$.

Problema 14 [0.5 puntos]

El número de la nueva casa de Marco tiene tres dígitos. Cuando él reta a sus amigos a adivinarlo, ellos dicen: 135, 780, 785 y 732.

- “Es asombroso”, dice Marco, “Cada uno ha adivinado exactamente un dígito en su lugar correcto!”. ¿Cuál es el número de la casa de Marco?

Problema 15 [1 puntos]

Demostrar que para toda pareja de números reales a y b que satisfacen que $0 \leq a \leq b < 1$, se cumple que

1. $0 \leq \dfrac{b-a}{1-ab} < 1.$
2. $0 \leq \dfrac{a}{1+b} + \dfrac{b}{1+a} < 1.$

Problema 16 [1 puntos]

Consideremos la ecuación diferencial:

$$-y' + 2y = xe^{-x}.$$

Mostrar que existe una solución de la forma $y = (ax + b)e^{-x}$ y deducir todas las soluciones de la ecuación.

Problema 17 [1 puntos]

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

- Determina los valores propios de A,
- Si λ es el mayor valor propio de AA muestra que $\lambda \geq 2$,
- Si A es definida positiva y λ es su mayor valor propio muestra que $\lambda > 4$.