Maestría en Ciencias con Especialidad en Computación y Matemáticas Industriales
Proceso de admisión 2024
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), A.C.
Examen de Matemáticas
(Tiempo: 3 horas)

Nombre: ______________________________

Fecha: ______________________________

Instrucciones:

- Escriba lo más claro posible para que al digitalizar las respuestas sean legibles.
- Escriba su nombre en cada hoja.
- Resuelva cada problema en hojas independientes.
- Justifique lo más precisamente posible todas sus respuestas, el procedimiento es importante y es tomado en cuenta en la evaluación.

Problema 1 [1 puntos]

Una matriz cuadrada Q de tamaño $n \times n$ se dice *ortogonal* si su inversa es igual a su transpuesta, es decir $Q^\top = Q^{-1}$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\|_2 = 1$. Demostrar que la matriz $Q := I_{n\times n} - 2uu^\top$ es *simétrica* y *ortogonal*.

Solution: Para que Q sea ortogonal se debe cumplir que $Q^\dagger = Q^{-1}$ y para que sea simétrica se debe cumplir que $Q = Q^\dagger$. Entonces, si cumple ambas condiciones cumple que $Q^2 = \mathbb{I}$. Notemos:

$$\begin{aligned} Q^\dagger &= \left(\mathbb{I} - 2uu^\dagger\right)^\dagger \\ &= \mathbb{I} - 2\left(uu^\dagger\right)^\dagger \\ &= \mathbb{I} - 2uu^\dagger = Q \end{aligned}$$

Q es simétrica. Veamos que cumple $Q^2 = \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(\mathbb{I} - 2uu^\dagger\right)\left(\mathbb{I} - 2uu^\dagger\right) \\ &= \mathbb{I} - 4uu^\dagger + 4u \underbrace{u^\dagger u}_{=\|u\|_2} u^\dagger \\ &= \mathbb{I} + 4uu^\dagger \left(\|u\|_2 - 1\right) \\ \|u\|_2 = 1 \rightarrow &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Tiempo estimado: 15 min

Problema 2 [1 puntos]

Para reforestar un bosque parcialmente destruido por un incendio, Pepe empieza a sembrar árboles. Cada mes, como llega a mejorar su técnica, logra sembrar 10 árboles más que en el mes anterior. Después de 5 años exactamente, llega a un total de 19500 árboles sembrados. ¿Cuántos árboles ha sembrado durante el primer mes?

Solution: Versión inicial (con bug!)

Sea n el numero de arboles sembrados el primer mes. El segundo mes, Pepe siembre $n+10$, el tercero $n+20$ etc. Al final de los 5 anyos, habrá sembrado:

$$\sum_{i=0}^{59}(n+10i) = 60n + 10\sum_{i=0}^{59} i = 60n + 10 \times 59 \times 30 = 60n + 17700.$$

Buscamos n tal que $60n + 17700 = 8370$ por lo que

$$n = -9330/60 = -155{,}5$$

Versión corregida: 8370 remplazado por 19500

$$\sum_{i=0}^{59}(n+10i) = 60n + 10\sum_{i=0}^{59} i = 60n + 10 \times 59 \times 30 = 60n + 17700 = 19500.$$

Por ende

$$n = 1800/60 = 30.$$

Tiempo estimado: 15mn

Problema 3 [1 puntos]

Consideremos la parábola de ecuación:

$$y = x^2 - 8.$$

Entre todas las *tangentes* a esta parábola, determinar cual(es) de ella(s) pasan por el punto $(5, 1)$. Dar su(s) ecuación(es).

Solution: Describiremos los puntos de la parábola como:

$$(a, a^2 - 8).$$

Las tangentes a estos puntos son de la forma:

$$y = (2a)x + c,$$

y como pasan por el punto $(a, a^2 - 8)$,

$$a^2 - 8 = 2a^2 + c$$

entonces $c = -a^2 - 8$. Las ecuaciones de las tangentes son entonces:

$$y = 2ax - a^2 - 8.$$

Ahora, entre todas estas tangentes, queremos una(s) tal que

$$1 = 2a \times 5 - a^2 - 8.$$

Por ende:

$$a^2 - 10a + 9 = 0 = (a - 1)(a - 9).$$

Por ende, tenemos dos de esas tangentes:

1. En $a = 1$, es la de ecuación $y = 2x - 9$.
2. En $a = 9$, es la de ecuación $y = 18x - 89$.

Tiempo estimado: 20mn

Problema 4 [1.5 puntos]

Una función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable de orden 2 se dice *convexa* si satisface que su matriz hessiana (la matriz cuadrada que contiene todas las derivadas parciales de orden 2 de la función) es *semidefinida positiva* en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$. Recordamos que una matriz A de tamaño $n \times n$ es semidefinida positiva si $\forall (u_1 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^n : (u_1 \cdots\ u_n)\, A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \geq 0$.

Una propiedad de las funciones convexas es que sus puntos críticos son *mínimos globales*.

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b) \neq (0, 0)$. Determinar los valores $n \in \mathbb{N}$ por los cuales la función

$$f(x, y) = (ax + by + c)^n,$$

es convexa.

2. Determinar, si existen, los mínimos globales de f.

Solution: 1. Sea $Hf(x,y)$ la matriz hessiana de f en el punto (x,y).

Si $n=1$, tenemos

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Si $n \geq 2$, tenemos

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} a^2 n(n-1)(ax+by+c)^{n-2} & ab\,n(n-1)(ax+by+c)^{n-2} \\ ab\,n(n-1)(ax+by+c)^{n-2} & b^2 n(n-1)(ax+by+c)^{n-2} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Sea $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos

$$(u\ v) Hf(x,y) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = n(n-1)(ax+by+c)^{n-2}(au+bv)^2.$$

A partir de (1) y (2), deducimos que $(u\ v)Hf(x,y)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0$ para cualquier punto (x,y) si $n=1$ o si n es un número par.

2. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = an(ax+by+c)^{n-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = bn(ax+by+c)^{n-1}.$$

Si $n=1$, f no tiene puntos críticos, asi que f no tiene mínimos globales.
Por otro lado, si $n \geq 2$, los puntos críticos son los puntos (x,y) que satisfacen

$$ax+by+c=0.$$

Esos puntos críticos son mínimos globales si n es par pues f es convexa (ver 1.). Si n es impar, esos puntos críticos no son mínimos globales pues

$$lim_{x \to -\infty} f(x,y) = -\infty.$$

Tiempo estimado: 15mn

Problema 5 [1 puntos]

Suponga que x_0 es una solución particular del sistema de ecuaciones $Ax=b$, donde A es una matriz rectangular y x,b son vectores. Demuestra que el conjunto de todas las soluciones del sistema $Ax=b$ es:

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid Ax = b\} \\ &= \{x \mid x = x_0 + h,\ \text{donde } h \in N(A)\} \\ &= x_0 + N(A) \longleftarrow \text{ Notación} \end{aligned}$$

NOTA: $N(A)$ es el espacio nulo o kernel de A.

Solution: Si $x \in S$, entonces $Ax=b$. Como también $Ax_0 = b$, entonces $Ax = Ax_0$, de donde $A(x-x_0)=0$ y por lo tanto $x - x_0 \in N(A)$; haciendo $h = x - x_0$ se tiene $x = x_0 + h$ con $h \in N(A)$.

Recíprocamente, si $x \in x_0 + N(A)$, entonces $x = x_0 + h$ para algún $h \in N(A)$; entonces $Ax = A(x_0 + h) = Ax_0 + Ah = b + 0 = b$. Luego, $x \in S$.

Tiempo estimado: 10 min

Problema 6 [2 puntos]

La ruta de un tren se define como el conjunto de puntos (lugar geométrico) que equidistan del punto $A(0,6)$ y el punto $B(5,1)$ en un plano cartesiano. Supongamos que te encuentras en el punto $C(0,0)$.

1. ¿Cuál es la distancia mínima que debes recorrer para intersectar la ruta del tren?
2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

Solution: Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera que equidista de los puntos A y B, entonces:

$$dist(P,A) = dist(P,B)$$

donde $dist(\cdot,\cdot)$ es la distancia euclideana entre dos puntos. Así tenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$$

$$(x-0)^2 + (y-6)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$$

$$x^2 + y^2 - 12y + 36 - x^2 + 10x - 25 - y^2 + 2y - 1 = 0$$

Reducimos términos semejantes

$$10x - 10y + 10 = 0$$

Simplificamos y obtenemos la ecuación de la recta (lugar geométrico) que equivale a la ruta del tren:

$$x - y + 1 = 0$$

$$y = x + 1$$

Para resolver los puntos 1 y 2 se puede hacer de dos maneras:

- **Forma Analítica**

  Sabemos que la distancia más corta de un punto a una recta esta dada por la linea perpendicular entre el punto y la recta. Dado que la ruta del tren tiene pendiente $m = 1$, la linea perpendicular a ella va tener pendiente inversa negativa. De tal manera el conjunto de rectas rectas perpendiculares esta dado por:

  $$y = -x + b$$

Sabemos que esta linea debe pasar por el punto $C(0,0)$, sustituyendo tenemos que

$$b = 0$$

Ahora encontramos el punto de intersección entre ambas lineas resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$2x = 1$$

$$x = -1/2$$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$y = 1/2$$

Entonces el punto de intersección esta dado por:

$$Z = (-1/2, 1/2)$$

Y la distancia mínima esta dada por:

$$\begin{gathered} dist(C, Z) = \sqrt{(0 - 1/2)^2 + (0 + 1/2)^2} \\ dist(C, Z) = \sqrt{1/4 + 1/4} \\ dist(C, Z) = \sqrt{2/4} \\ dist(C, Z) = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2} \end{gathered}$$

- **Forma Geométrica**

  Si tomamos encuentra que el punto C esta en el origen y que la intersección del lugar geométrico con los ejes coordenados es en los puntos $M(0,1)$ y $N(-1,0)$. Entonces el triangulo MCN es un triangulo rectángulo asócieles con longitudes de hipotenusa $\sqrt{2}$ y 1 para catetos. Utilizamos la formula del área:

  $$A = \frac{b \times h}{2}$$

  Es fácil calcular el área del triangulo si tomamos como base un cateto y la altura el otro cateto,

  $$A = 1/2$$

  . Ahora, si tomamos como base del triangulo la hipotenusa, y altura nos dará la distancia que queremos. Así que sustituimos

  $$1/2 = \frac{\sqrt{2} \times h}{2}$$

  Despejamos y tenemos que la distancia de intersección es:

$$h = 1/\sqrt{2}$$

Por otro lado, tomando en cuenta las propiedades de la triangulo rectángulo asócieles, el punto de intersección estaría dado en el punto medio de la longitud de la hipotenusa. El punto medio esta dado por la siguiente ecuación:

$$PM = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Sustituimos para enconrear el punto de intersección, y para nuestro caso es:

$$PM = (\frac{0 - 1}{2}, \frac{1 + 0}{2})$$

$$PM = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$$

Tiempo estimado: 20min

Problema 7 [1.5 puntos]

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

1. ¿Qué vale I_1?
2. ¿Qué vale I_2?
3. Usando dos formas de expresar I_{n+2} e integración por partes, mostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. (Para 0.5 puntos extras) Deducir una formula explícita para I_n por cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

1. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$
2. Por partes, $I_2 = [(-\cos x)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 x)dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)dx = \frac{\pi}{2} - I_2$. Por ende, $2I_2 = \frac{\pi}{2}$ y $I_2 = \frac{\pi}{4}$.
3. Escribimos I_{n+2} de dos maneras distintas. Primero:

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x))\sin^n(x)dx = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)dx.$$

Por otro lado,

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx = [(-\cos x)\sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)(n+1)\cos x \sin^n(x)dx,$$

entonces:

$$I_{n+2} = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(n+1)\sin^n(x)dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \sin^n(x)dx.$$

Al usar las dos formulaciones, deducimos:

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

y

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. Con los puntos anteriores, tenemos manera de resolver cualquier I_n, pero necesitamos distinguir:

   - n par:

     $$I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times ... \times 3}{2(p)\times 2(p-1)\times ... \times 2(2)} I_2 = \frac{(2p)\times(2p-1)\times(2p-3)\times ... \times 3\times 2}{[2^{p-1}(p!)]^2\times 2}\frac{\pi}{4}$$

     por lo que

     $$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi.$$

   - n impar:

     $$I_{2p+1} = \frac{2(p)\times 2(p-1)\times ... \times 2(1)}{(2p+1)(2p-1)\times(2p-3)\times ... \times 3} I_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Tiempo estimado: 35mn

Problema 8 [1 puntos]

¿Cuántas soluciones *reales distintas* tiene la ecuación siguiente?

$$((x^2-2)^2-5)^2 = 9.$$

Solution: Al primer nivel, podemos tener:

- $(x^2-2)^2-5 = 3$.
- o bien $(x^2-2)^2-5 = -3$.

La primera de estas dos ecuaciones llevaría $x^2-2 = \pm 2\sqrt{2}$, que nos daría solamente dos soluciones reales (ya que $2-2\sqrt{2} < 0$), $\pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. La segunda equivale a $x^2-2 = \pm\sqrt{2}$ que nos da en total cuatro más soluciones reales $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$. Por ende tenemos **6 soluciones reales distintas** en total.

Tiempo estimado: 20mn